Advanced ML & AGT

Class 4

Lipschitz Bandits

מודל bandit עם רצף פעולות

מימוש אחרון:

אלגוריתם

חסם תחתון

מרחב כללי

אלגוריתמים וחסם תחתון

אלגוריתמים אדפטיביים.

תמחור מוצר

מוטיבציה

מספר הפעולות גדול (אין סופי)

הרבה פעולות דומות

- מחירים
- מוצרים

Continuum-Armed Bandits (CAB)

פעולות $X = [0,1]$

רווחים $\mu(x) \in [0,1] \quad \forall x \in X$

ניתן שתוחלת הרווחים Lipschitz:

$$\forall x,y \in X \quad |\mu(x) - \mu(y)| \le L|x-y|$$

L קבוע ה-Lipshitz, ידוע לאלגוריתם.

פרופיל של הבעיה:

$$(T, L, \mu(\cdot))$$

שאלה:

איך אפשר להשתמש באלגו' עם מספר פעולות סופי?

פתרון פשוט: דיסקרטיזציה קבועה

נתון $S \subseteq X$ סופית

נריץ אלגוריתם MAB על S:

UCB, Succesive Arm Elimination

הבסיס כולל:

(K) ביחס ל S (כמו מקודם)

(ב) השאלה בין S ל X

כמובן, ניתן להגדיל את S:

מגדיל את (K) מגדיל את (ב)

שגיאת הדיסקרטיזציה:

$\mu^*(X) = \sup_{x \in X} \mu(x)$ $\qquad$ $\mu^*(S) = \max_{x \in S} \mu(x)$

$$DE(S) = \mu^*(X) - \mu^*(S)$$

ניתוח regret:

$W(ALG)$ - תוחלת הרווח של האלגוריתם

$R_S(T)$ - תוחלת ה regret של S ב-T צעדים

$$E[regret] = \mu^*(X)T - W(ALG)$$

$$= [\mu^*(S)T - W(ALG)] - (\mu^*(X) - \mu^*(S))T$$

$$= R_S(T) + T \cdot DE(S)$$

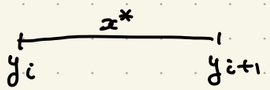
קיימים ALG עבורם $R_S(T) = O(\sqrt{|S| T \log T})$

חסם ל-regret:

$$E[regret] = O(\sqrt{|S| T \log T}) + DE(S)T$$

דיסקרטיזציה אחידה:

$\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ $\quad S = \{y_i = \varepsilon \cdot i\}$ $\quad DE(S) = \varepsilon L$



משפט: עבור $\varepsilon = \left(\frac{\log T}{T L^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ נקבל

$$E[regret] = O(L^{1/3} T^{2/3} \log^{1/3} T)$$

חסם תחתון

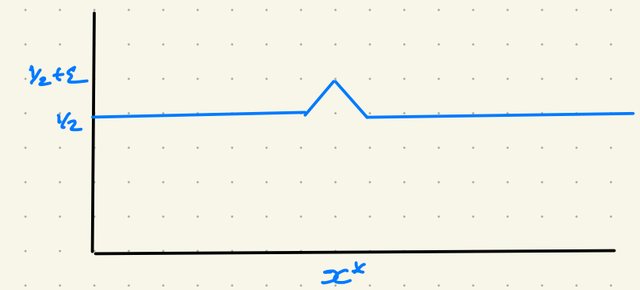
נראה חסם תחתון $\Omega(T^{2/3})$ על ה-regret.

נבדוק רדוקציה לחסם $\Omega(\sqrt{KT})$ (הרצאה 2)

החסם התחתון הקודם:

$$I_j(i) = \begin{cases} Br(1/2) & i \neq j \\ Br(1/2+\varepsilon) & i = j \end{cases}$$

המבנה החדש:



נגדיר פרופיל $I(x^*,\varepsilon)$

$$\mu(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } |x-x^*| \geq \varepsilon/L \\ 1/2+\varepsilon-L|x-x^*| & \text{אחרת} \end{cases}$$

השלמה: $\mu(\cdot)$ הוא L-Lipschitz ו- $\frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq \frac{1}{2}+\varepsilon$

משפט: לכל אלגוריתם לCAB קיים פרופיל $I = I(x^*,\varepsilon)$ עבורו

$$E[\text{regret}|I] = \Omega(L^{1/3}T^{2/3})$$

נתלק את $X=[0,1]$ ל-k קטעים שווים.

נקבע $\varepsilon = \frac{1}{2k}$ $\quad \mathbb{K} = \{x_i = 2\varepsilon i\}$

לכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ נתאים $x_i^* = x_i + \varepsilon$

הרעיון: כל פעם שהאלגוריתם משתמש $a \in [x_i, x_{i+1}]$ עדיף לו לשחק x_i^*.

אם האלגוריתם ישחק רק x_i^* אז זה MAB עם k פעולות.

זה בדיוק הפרופיל של החסם התחתון.

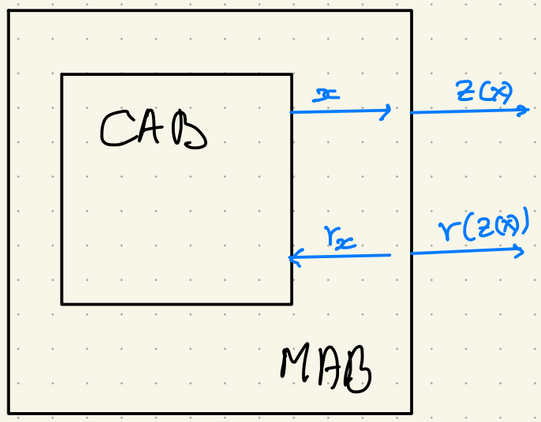
החסם התחתון (הרצאה ב)

משפט: לכל $\varepsilon \leq \sqrt{c\frac{k}{T}}$ יש פרופיל J עבורו

$$E[\text{regret}] = \Omega(\varepsilon T) = \Omega(\sqrt{KT})$$

הורחבת חסם תחתון ל CAB:

נבנה אלגוריתם MAB עבור K תוך שימוש באלגוריתם CAB



צריך להגדיר איך נבחר את $z(x)$ ואת r_x.

בחירת $z(x)$:

$x \in [2i\varepsilon, 2(i+1)i]$

$z(x) = (2i+1)\varepsilon = x_i^*$ אז

אנחנו צריכים להפוך רווח לוגיסטי של $z(x)$ לרווח לוגיסטי r_x (עבור x)

הבעיה, אנחנו לא יודעים את $\mu(x)$!

הפתרון: בהסתברות p_x נחזיר את r ואחרת $Be(1/2)$

$$r_x = \begin{cases} r & \text{with prob } p_x \\ Be(1/2) & \text{otherwize} \end{cases}$$

$$E[r_x|x] = p_x\,\mu(z(x)) + (1-p_x)\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \left(\mu(z(x)) - \tfrac{1}{2}\right)p_x$$

$$= \begin{cases} 1/2 & z(x) \neq x^* \\ 1/2 + \varepsilon p_x & z(x) = x^* \end{cases}$$

נרצה $\varepsilon p_x = \varepsilon - |x - z(x)|L$ $\Leftarrow$ $p_x = 1 - \frac{|x - z(x)| \cdot L}{\varepsilon}$

ונקבל $E[r_x|x] = \mu(x)$

סיום ההוכחה (חסם תחתון CAB)

x_t - פעולה של CAB בצעד t

$a_t = z(x_t)$ - פעולה של MAB בצעד t

מתקיים

$$\mu(x_t) \le \mu(a_t)$$

$$E[\text{regret-CAB}] \ge E[\text{regret-MAB}] \ge \Omega(\sqrt{KT})$$

$\varepsilon = T^{-\frac{1}{3}}$ נבחר $\varepsilon \le \sqrt{c\frac{K}{T}}$ ו- $K = \frac{1}{2\varepsilon}$

$$E[\text{regret-CAB}] = \Omega(T^{2/3})$$

Lipschitz MAB

נרמיז מ $X=[0,1]$ לקבוצה כללית ומטריקה.

עבור מטריקה D הרווחים יקיימו

$$\forall x,y\in X \quad |\mu(x)-\mu(y)| \le L\, D(x,y)$$

(למען הפשטות ננית $L=1$ ו- $D(x,y)\le 1$)

מרחבים מטרים (בקיצור)

מרחב מטרי (X,D) כאשר $D: X\times X\to\mathbb{R}$ הוא מטריקה פורמלית:

1. $D(x,y)\ge 0$ (לא שלילי)
2. $D(x,y)=0 \iff x=y$
3. $D(x,y)=D(y,x)$ (סימטרי)
4. $D(x,z)\le D(x,y)+D(y,z)$ (אי שוויון המשולש)

3 דוגמאות למרחבים מטרים

1. $X=[0,1]^d$ ו- p-norm $(p\ge 1)$

$$\ell_p(x,y)=\|x-y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{d}(x_i-y_i)^p\right)^{1/p}$$

2. מסלול קצר ביותר בגרף

$X=\{\text{גרפים}\}$ $\quad D(x,y)=$ אורך מסלול קצר ביותר מ x ל y

דיסקרטיזציה

כמו מקודם: נרצה $DE(S)\le\varepsilon$ ו- $|S|$ קטן.

דוגמא: $X=[0,1]^d$ ו- ℓ_p עם $p\ge 1$.

דיסקרטיזציה אחידה $|S|=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil^d$

ולכן $DE(S)=c_{p,d}\,\varepsilon$

$c_{p,d}$ תלוי ב p ו- d, עבור $p=1$ לא $c_{1,d}=d$

עבור $\varepsilon=\left(\frac{\log T}{T}\right)^{\frac{1}{d+2}}$ נקבל

$$E[\text{regret}]=O\left(\sqrt{\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^d T\log T}+\varepsilon T\right)=O\left(T^{\frac{(d+1)}{(d+2)}}\log^{\frac{1}{d+2}}T\right)$$

מרחבים כללים

ε-mesh $S \subseteq X$ הוא ε-mesh אם

$$\forall x \in X \ \exists y \in S : \ D(x,y) \le \varepsilon$$

diameter:

$$\mathrm{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} D(x,y)$$

ε-covering תת קבוצות $X_i \subseteq X$

כך $X = \bigcup_i X_i$ וכן $\mathrm{diam}(X_i) \le \varepsilon$

covering number: גודל ה-ε-cover הכי קטן

מסמנים ע"י $N_\varepsilon(X)$

מסמן סיבוכיות (גם בלמידה)

עובדה: אם $x_1 \dots x_N$ הוא ε-cover, וכן $x_i \in X_i$

אז $S = \{x_1 \dots x_N\}$ הוא ε-mesh

הגדרה: ה-covering dim של X עם מכפיל $c>0$

$$\mathrm{cov}_c(X) = \inf_{d \ge 0} \{ N_\varepsilon(X) \le c \cdot \varepsilon^{-d} \quad \forall \varepsilon > 0 \}$$

regret במרחבים כללים

יהי $d = \mathrm{cov}_c(X)$.

קיימת קבוצה S שהיא ε-mesh: $|S| = N_\varepsilon(X) \le c/\varepsilon^d$

משפט:

$$E[\text{regret}] = O\left(T^{\frac{d+1}{d+2}} (c \log T)^{\frac{1}{d+2}}\right)$$

משפט: עבור $([0,1]^d, \ell_2)$ מתקיים

$$E[\text{regret}] = \Omega\left(T^{(d+1)/(d+2)}\right)$$

דיסקרטיזציה אדפטיבית: ZOOM ALGO.

הרעיון: $DE(S) \le D(S,x^*) = \min_{x\in S} D(x,x^*)$

נרצה להקטין את S ולשמור על $D(S,x^*)$

הבעיה: אנחנו לא יודעים מספר x^*.

אלגוריתם אדפטיבי:

דיסקרטיזציה רבה בטווחים עם רווח גבוה

לא נוכל להימנע מהחסם התחתון

נרצה שאם הפרופיל "פשוט"

נקבל ביצועים "משופרים".

אלגוריתם ZOOM:

- שימוש בטכניקת UCB
- דיסקרטיזציה אדפטיבית
- הצגת "מאורע טוב"

אלגוריתם ZOOM:

מתחזק $S\subseteq X$ "פעולות פעילות"

בכל צעד:

- יש פעולות שהוכרעו לפעילות (נוספות ל-S)

פעולות לא עונבות את S.

- יש כלל "SelectionRule"

לפי מורים להבדיל אחת

מה פעולות ב-S.

בדיק להבדיר:

- מתי פעולה נוספת ל-S.

(לפל היתר אחת)

- איזה פעולה מ-S מבדים.

הנחה: $\mu(\cdot)$ היא 1-Lipschitz

Confidence radius/ball

נקבע זמן t ופעולה פעלה $x \in S$

$n_t(x)$ מספר הפעמים שבוצעה x (לפני זמן t)

$\bar{\mu}_t(x)$ ממוצע הרווחים של פעולה x

הרדיוס:

$$r_t(x) = \sqrt{\frac{2\log T}{n_t(x)+1}}$$

מבטיח שבהסתברות גבוהה:

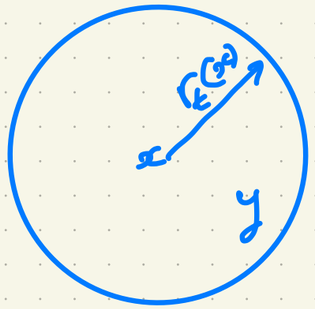
$$|\mu(x) - \bar{\mu}_t(x)| \le r_t(x)$$

confidence ball

$$B_t(x) = \{y \in X : D(x,y) \le r_t(x)\}$$

הנחה: $D(x,y) \le 1$

Activation Rule



מוגדרת:

$D(x,y) \le r_t(x)$

$\mu(y) \le \mu(x) + r_t(x)$

אין הבדל גדול בין $\mu(x)$ ל- $\mu(y)$

אינטואיציה: בכל זמן $\bigcup_{x \in S} B_t(x) = X$

כאשר האלגו משתמש בפעם אחרי הרבור של x מתבונן

אם יש $y \in X$ כך $y \notin \bigcup_{x \in S} B_t(x)$ מוסיפים את y ל S

הערה: $n_t(y) = 0 \Longrightarrow B_t(y) = X$.

לכן נוסיף לכל היותר y אחד.

אלגוריתם: המאורע הטוב

נרצה להראות $|\mu(x) - \bar{\mu}_t(x)| \le r_t(x)$ $\forall x \in X$

הבעיה: X אין סופית

נניח שהצלנו את כל הרווחים מראש.

$$\mathcal{E}_x = \{ |\mu(x) - \bar{\mu}_t(x)| \le r_t(x) \quad \forall t \le T \}$$

$$\mathcal{E} = \bigcap_{x \in X} \mathcal{E}_x$$

טענה: נניח שהרווחים הם $\{0,1\}$

אזי $\Pr[\mathcal{E}] \le 1 - \frac{1}{T^2}$

הוכחה: עבור $x \notin S$ $(n(x)=0)$

אזי $\mathcal{E}_x$ מתקיים כי"ון ש $r_t(x) \ge 1$.

Selection Rule

הגדרה של UCB נגדיר

$$index_t(x) = \bar{\mu}_t(x) + 2 r_t(x)$$

$$a_t = \arg\max_{x \in S} index(x)$$

אלגוריתם ZOOM

Initialize: $S \leftarrow \phi$

At time t:

- If $\exists y \in X$ s.t. $\forall x \in S: y \notin B_t(x)$

  Then $S \leftarrow S \cup \{y\}$

- Play $a_t = \arg\max_{x \in S} index(x)$

ניתוח המאורע הטוב

לפי Hoeffding אז $\forall x \in X \quad \Pr[\mathcal{E}_x] \geq 1 - \frac{1}{T^4}$

הבעיה היא לבצע union bound

בהקבוצה X שגדולה מדי

נקבע פרופיל של Lipschitz MAB

X_0 קבוצת כל הפעולות שיכולות להכנס ל S

בעזרת קבוצה סופית!

כיוון שהאלגוריתם דטרמיניסטי, הצמן T

יש שני רווחים אפשריים $\{0,1\}$

(בגלל המקרים הימי' שנשתמש בעובדה שרווחים סופיים)

M מספר הפעולות הפעולות (שגדול S בסיום)

y_j הפעולה ה-j-ית שהגרה לפעולה.

M ו-y_j הם מצב

נשלים את y_j עד y_T ע"י קבעת $y_j = y_M$ עבור $M < j$

המאורע הטוב $\quad \mathcal{E} = \bigcap_{j \in [T]} \mathcal{E}_{y_j}$

נראה ש $\mathcal{E}_{y_j}$ מתרחש בהסתברות גבוהה.

נקבע $x \in X_0$ ו $j \in [T]$

המאורע $\{y_j = x\}$ נקבע ע"י הרווחים של

הפעולות האחרות.

המאורע $\mathcal{E}_x$ נקבע רק ע"י הרווחים של x.

אם סה"כ $\Pr[y_j = x]$ אז

$$\Pr[\mathcal{E}_{y_j} \mid y_j = x] = \Pr[\mathcal{E}_x \mid y_j = x] = \Pr[\mathcal{E}_x] \geq 1 - \frac{1}{T^4}$$

נסכום על $x \in X_0$

$$\Pr[\mathcal{E}_{y_j}] = \sum_{x \in X_0} \Pr[y_j = x] \cdot \Pr[\mathcal{E}_{y_j} \mid y_j = x] \geq 1 - \frac{1}{T^4}$$

נבצע union bound על הצמנים $j \in [T]$

$$\Pr[\mathcal{E}_{y_j},\ j \in [T]] \geq 1 - \frac{1}{T^3}$$

☆

מראש יש שהמאורע הטוב התרחש.

אנליזה: פעולות רעות

פעולה רעה אם הרווח שלה קטן משמעותית מ μ^*.

נראה עבור פעולות פעילות רעות
- רחוקות אחת מהשניה
- משתקים אותם מעט פעמים.

$$\mu^* = \sup_{x \in X} \mu(x)$$

$$\Delta(x) = \mu^* - \mu(x)$$

$$n(x) = n_{T+1}(x)$$

למה:

$$\forall x \in X \ \forall t \in [T] \quad \Delta(x) \le 3\, r_t(x)$$

הוכחה:

נניח שבזמן t שיתקנו את x
קיימת $y \in S$ כך $x^* \in B_t(y)$

$$index(x) \ge index(y) = \underbrace{\bar{\mu}_t(y) + r_t(y)}_{\ge \mu(y)} + r_t(y) \underbrace{\ge}_{\text{Lipshitz}} \mu(x^*) = \mu^*$$

עבור x:

$$index(x) = \underbrace{\bar{\mu}_t(x)}_{\mu(x) + r_t(x)} + 2r_t(x) \le \mu(x) + 3r_t(x)$$

קבלנו $\mu(x) + 3r_t(x) \ge \mu^* \Longrightarrow 3r_t(x) \ge \Delta(x)$

אם לא שתקנו את x בזמן t:
- אם לא שתקנו את x מעולם, אז $r_t(x) > 1$
- אם שתקנו את x בזמן τ בפעם האחרונה

$$r_t(x) = r_\tau(x) \ge \frac{\Delta(x)}{3}$$

☆

מסקנות:

1. לכל שתי פעולות פעילות x,y אזי

$$D(x,y) > \frac{1}{3}\min\{\Delta(x), \Delta(y)\}$$

ניתן ש x הפכה לפעילה ראשונה.
בזמן t y הפכה לפעילה
אזי $D(x,y) > r_t(x)$ (כיוון ש-y הפכה פעילה)

$$r_t(x) \geq \Delta(x)/3$$

2. $\forall x \in X \quad n(x) \leq \frac{O(\log T)}{\Delta^2(x)}$

$$\Delta(x) \leq 3r_{T+1}(x) = 3\sqrt{\frac{2\log T}{n(x)}}$$

$$n(x) \leq \frac{18\log T}{\Delta^2(x)}$$

אנליזה Covering number

נחלק את הפעולות לפי $\Delta(x)$

$$\forall r>0 \qquad X_r = \{x \in X : r \leq \Delta(x) < 2r\}$$

לצורך

$Y_i = X_r$ עבור $r = 2^{-i}$ $\left(\bigcup_{i\geq 0} Y_i = X\right)$

$Z_i \subseteq Y_i$ הפעולות שהפכו לפעילות.

$$D(x,y) \geq r/3 \ : \ x,y \in Z_i$$

נניח שצריכנו את x לפני y.

בזמן צירוף y: $d(x,y) > r_t(x) \geq \frac{\Delta(x)}{3} \geq \frac{r}{3}$

אם נכסה את Y_i בקבוצות עם קוטר $r/3$
אזי y,x לא באותו קבוצה

ניתן לכסות את Y_i ע"י $N_{r/3}(Y_i)$

לכן $|Z_i| \leq N_{r/3}(Y_i)$

Zoom dimension

$$\inf_{d>0} \left\{ N_{\frac{r}{3}}(X_r) \le c\, r^{-d} \quad \forall r>0 \right\}$$

אם כן:

$$E[\text{regret}] = O\left(T^{\frac{d+1}{d+2}} (c \log T)^{\frac{1}{d+2}}\right)$$

מקבלים עבור $\delta = \left(\frac{\log T}{T}\right)^{\frac{1}{d+2}}$

Zoom vs Covering dim.

Covering - תכונה של המרחב המטרי

Zoom - תכונה של הפרופיל (X_r)

ניתוח ה regret

$$R_i(T) \triangleq \sum_{x \in Z_i} \Delta(x)\, n(x) \le \frac{O(\log T)}{\Delta(x)} N_{r/3}(Y_i) = O\left(\frac{\log T}{r} N_{\frac{r}{3}}(Y_i)\right)$$

עבור סכום $\Delta(\cdot) \le \delta$ נפרד מ $\Delta(\cdot) > \delta$

$$R(T) \le \delta \cdot T + \sum_{i: 2^{-i} > \delta} R_i(T)$$

$$\le \delta T + \sum_{i: 2^{-i} = r > \delta} \frac{O(\log T)}{r} N_{r/3}(Y_i)$$

$$\le \delta T + O(c \cdot \log T) \left(\frac{1}{\delta}\right)^{d+1}$$

כאשר $\forall r>0 \quad N_{r/3}(X_r) \le c \cdot r^{-d}$

covering number

תמחור מדר

מודל:

- לכל קונה t יש ערך v_t שנבחר מהתפלגות D
- מציעים לקונה מחיר p_t.

אם $p_t \le v_t$ יש קנ"ה

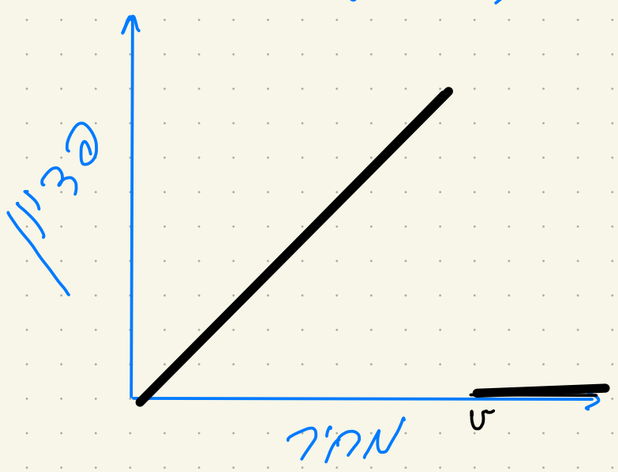
אם $p_t > v_t$ אין קנ"ה

המטרה: למקסם את הפרסין (עלות יצור אפס)

$$\sum_{t=1}^{T} p_t \cdot I(p_t \le v_t)$$

ניח שם מוגבלת על $[0,1]$

פונקצ"ת הפרסין $x\, I(x \le v)$



האם הפונקציה Lipschitz?

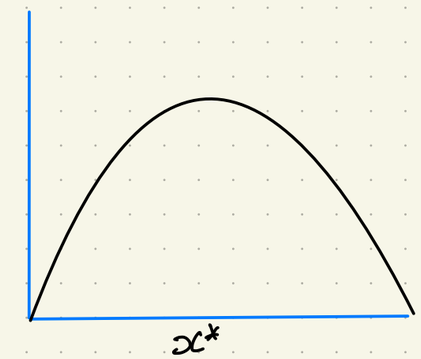
מה המחיר האופטימלי בהינתן D?

תמחור מוצר

תוחלת הפדיון במחיר x

$$\mu(x) = x \cdot \Pr_{v \sim D}[x \le v]$$

נניח ש μ קעורה



$$0 > \mu''(x)$$

נניח שגם $c_1 < |\mu''(x)| < c_2$

שימוש ב- MAB

- נתבונן בדיסקרטיזציה אחידה ל-k מחירים.

$$\left\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1-\frac{1}{k}, 1\right\}$$

- נריץ אלגוריתם עבור MAB (נניח UCB או SuccArmElim)

שאלות:

1. מה יהיה ה regret
2. איך לבחור את k.

הגדרות מוגדר

$$\mu_i = \mu\left(\frac{i}{k}\right) = \frac{i}{k} \Pr_{v\sim D}\left[\frac{i}{k} \le v\right]$$

$$\mu^* = \max_i \mu_i$$

$$\Delta_i = \mu^* - \mu_i$$

Rev^{UCB} = UCB בג'ון של

הרעיון:

① נתון $\left(\mu^* T - Rev^{UCB}\right)$

② נתון $\left(\mu(x^*) - \mu^*\right) T$

סכום $E[\text{regret}] = ① + ②$

למה: $c_1 (x^* - x)^2 < \mu(x^*) - \mu(x) < c_2 (x^* - x)^2$

הוכחה: מטור טיילור, קיים $z \in [x, x^*]$

$$\mu(x) = \mu(x^*) + (x - x^*)\mu'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2}\mu''(z)$$

כיוון x^* הוא מקסימום של μ ו/ג $\mu'(x^*) = 0$

הנחנו ש- $c_1 < |\mu''(z)| < c_2$

☆

מסקנות:

① $\Delta_i \ge c_1 \left(x^* - \frac{i}{k}\right)^2$

② $\mu^* > \mu(x^*) - \frac{c_2}{k^2}$

קיים i/k כך $\frac{1}{k} > |x^* - i/k|$

ניתוח ה regret

עבור אלגו UCB

$$\mu^* T - Rev^{UCB} \le O(\log T) \sum_{i:\mu_i<\mu_*} \frac{1}{\Delta_i}$$

$$\le O(\log T)\, \frac{4K^2}{c_1} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2}$$

$$= O\left(\frac{K^2}{c_1} \log T\right)$$

$$(\mu(x^*)-\mu^*)T \le \frac{c_2}{K^2} T$$

$$\mu(x^*)T - Rev^{UCB} = O\left(\frac{K^2}{c_1}\log T + \frac{c_2}{K^2} T\right)$$

$$= O\left(K^2 \log T + \frac{T}{K^2}\right)$$

בחירת K:

$$K = T^{1/4}\sqrt{\log T}$$

משפט:

$$E[\text{regret}] = O\left(\sqrt{T \log T}\right)$$

חסם תחתון:

$$E[\text{regret}] = \Omega\left(\sqrt{T}\right)$$

סיכום ההרצאה

MAB עם מספר פעולות אין סופי

- פונקציות Lipschitz
- דיסקרטיזציה אחידה $O(T^{2/3})$
  חסם תחתון $\Omega(T^{2/3})$
- מרחב מטרי כללי
- דיסקרטיזציה אדפטיבית
  אלגוריתם ZOOM
- תמחור מעבר יחיד

מקורות

Slivkins פרק 4

תמחור מעבר:

Kleinberg, Leighton 2003