

Advanced ML

& AGT

Class 5



Online with full feedback and adversarial cost

:3N

In time $t \in [T]$:

① Adversary selects costs

$c_t(a) \in [0, 1]$ for $a \in A$

② Algorithm selects $a_t \in A$

③ Algorithm incurs cost $c_t(a_t)$

④ cost of all actions revealed

$c_t(a) \forall a \in A$

Adversarial Costs : Full Feedback

תיכן מוקד סיבי ליקוי Full feedback

עליה שוכן סיבי

Adversarial cost

לכל נסיעה גודל -

(.JN מ"רnf .OPN מ"מ)

! עליה שוכן סיבי -

ונזון מושגן דבש

.IJ3CC מ"מ

? עליה שוכן סיבי

, עליה שוכן סיבי זונזון -

עליה שוכן סיבי

! עליה שוכן זונזון מ"מ regret ? -

Problem protocol (model)

In time t :

- ① Observation x_t arrives.
 - ② Each expert i predicts $z_{i,t}$
predictions $z_{1,t}, \dots, z_{k,t}$
 - ③ Algorithm pick expert $e \in [k]$
predicts $z_{e,t}$
 - ④ Correct label z_t^* revealed
costs $c(z_{j,t}, z_t^*) \quad \forall j \in [k]$
 - ⑤ Algorithm incurs cost C

Online learning with experts

Sequential Prediction with Expert Advice

(וְנִזְמָן קָרְבָּן) מִנְמָרָן k yf e'

"ל'זנגו" פועלות נרנינס כפועלים מזרגים כרא

କବିତା ମହିନେ

points for inclusion and for

לראם נסח הכתובת בפיניקית

(n'3nra' f' loss n'3 n'1e)

גַּתְּהָרָה וְגַּדְּלָה נִזְנָתָן כְּבָשָׂר וְבָשָׂר גַּתְּהָרָה

: ଦୂର ନିର୍ମାଣ କାର୍ଯ୍ୟ

הנימוק נגזר מהתוצאות

$f^* \in H = \text{conv}(\mathcal{C})$ הינו מינימלי

loss -1 n'sn s

What is the meaning of the word 'she'?

: regret for DDP

$$E[\text{regret}] \leq E[n_1 + n_2] \Delta$$

$$E[n_1] = \sum_{t=1}^T \Pr \left[\hat{C}_{1,t} > C_1 + \frac{\Delta}{2} \right]$$

$$\leq \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 t} \approx \int_1^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 t} dt = O\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)$$

$$E[n_2] = \sum_{t=1}^{\infty} \Pr \left[\hat{C}_{2,t} < C_1 + \frac{\Delta}{2} \right]$$

$$\leq \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 t} = O\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)$$

$$E[\text{regret}] = O\left(\frac{1}{\Delta}\right)$$

? more DDP : ok

IID cost

[0,1] for D_a we have a tight bound

→ for 3MN or 2MN: Greedy, pick
one with max probability

$$E[\text{regret}] = O\left(\frac{1}{\Delta}\right) \quad k=2 \geq 2: \text{GDN}$$

$\log T \propto \sqrt{m}/k$

CCC:

$C_2 > C_1$ wif a_2, a_1 are eq

$$0 < \Delta \quad \Delta + C_1 = C_2$$

$C_1 + \frac{\Delta}{2}$ is the mean of n_1

$\hat{C}_{2,t}$ is the mean of n_2

$C_1 + \frac{\Delta}{2}$ is the

$$\text{cost}(a) = \sum_{t=1}^T c_t(a)$$

מונטגנו

$$\text{cost(ALG)} = \sum_{t=1}^T c_t(a_t)$$

$$a^* = \arg \min_{a \in A} \text{cost}(a) \quad \text{cost}^* = \text{cost}(a^*)$$

Deterministic oblivious adversary

$(c_t(a) : a \in A, t \in [T])$ אוסף נתונים ניידים

$$\text{Regret} = \text{cost(ALG)} - \underbrace{\min_{a \in A} \text{cost}(a)}_{\text{cost}^*}$$

Randomized oblivious adversary

$(c_t(a) : a \in A, t \in [T])$ מודול נתונים ניידים
ה凛ון מוכנה

$$\text{P. Regret} = \text{cost(ALG)} - \min_{a \in A} E[\text{cost}(a)]$$

Adversaries and regret

אחד מילבון נקי יופיע : oblivious adversary
המשתמש בנתונים יופיע
המשתמש בנתונים יופיע
המשתמש בנתונים יופיע
המשתמש בנתונים יופיע

t יופיע בזאת נקי יופיע : adaptive adversary
המשתמש בנתונים יופיע

מקרה

adversary DNS -

adaptive DNS -

$\log k$ חישוב ניידות מושג: כוון

• t מטר S מוגדרת S_t : הוכחה
 t מטר S מוגדרת $W_t = |S_t|$

הנימוק ניידות שיעור $W_t = k$

נניח שיעור מוגדר כך: $W_t \geq 1$

$W_{t+1} \leq W_t / 2$ מכיון ש

משמעותו של גודל מילוי

$\log_2 k \geq \text{מספר מושג}$



הנימוק מושג כפונקציית:

השאלה מושג כפונקציית $-W_t$

השאלה מושג כפונקציית $-W_1$

השאלה מושג כפונקציית $-W_t$

השאלה מושג כפונקציית $-W_J$

$W_t \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot k = \frac{k}{2^t}$

Binary Prediction with Expert Advice

$\forall t: C_t(e) = 0$: מושג מושג כל אחד
או בזורה מושג

$S \leftarrow \text{Experts}$
: t מטר

$S_1 = \{e \in S: z_{e,t} = 1\}$

$S_0 = \{e \in S: z_{e,t} = 0\}$

$|S_1| > |S_0| \text{ סביר}$

1 מושג מושג

0 מושג מושג

b_t מושג מושג מושג

$S \leftarrow S_{b_t}$

WMA

parameter $\eta \in [0, 1]$

Initialize $w_i(i) = 1 \quad i \in [k]$

At time t

$$S_{0,t} = \{i : z_{i,t} = 0\} \quad S_{1,t} = \{i : z_{i,t} = 1\}$$

If $\sum_{i \in S_{1,t}} w_t(i) \geq \sum_{i \in S_{0,t}} w_t(i)$ Then predict 1

Else predict 0.

Observe z^*

For each expert i :

If $z^* \neq z_{i,t}$ Then $w_{t+1}(i) = (1-\eta)w_t(i)$

Else $w_{t+1}(i) = w_t(i)$

Weighted Majority Algorithm

all the prior known to be right

i known to have $w_t(i)$

1234 7654 2

$w_{t+1}(i) = (1-\eta) w_t(i)$: i known to have 'right'

$w_t(i)$ of when it's right

$$\sum_{i \in S_{e,t}} w_t(i) \geq \frac{1}{2} w_t$$

$$w_{t+1} \leq (1 - \frac{\eta}{2}) w_t$$

$$\frac{(1-\eta)^{\text{cost}^*}}{K} < \frac{w_{T+1}}{w_1} = \prod_{t=1}^T \frac{w_{t+1}}{w_t} \leq (1 - \frac{\eta}{2})^M$$

$$\text{cost}^* \ln(1-\eta) - \ln K < \ln\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) M \leq -\frac{\eta}{2} M$$

$\ln(1-x) \leq -x$

$$M < \text{cost}^* \frac{2}{\eta} \ln\left(\frac{1}{1-\eta}\right) + \frac{2}{\eta} \ln K$$

for J

$$M < \text{cost}^* \cdot \frac{2}{1-\eta} + \frac{2}{\eta} \ln K$$

$\text{! int } \mathcal{S}$ regret $\geq 3k$ $\Theta(T) = \text{cost}^* \rho/c$: plan

计划的

计划，假设

计划 M 比 Q 好

最优解

$$\leq -\frac{\eta}{2} M$$

$$\ln(1-x) \leq -x$$

以 plan WMA 为准则 soon: Goon

$$\frac{2}{1-\eta} \text{cost}^* + \frac{2}{\eta} \ln k$$

$$W_t = \sum_i w_t(i) \geq 3c$$

$$W_1 = K \sqrt{n} \ln N$$

$$w_{T+1} > w_T(a^*) = (1-\eta)^{\text{cost}^*} \text{ cost}^*$$

$$\frac{w_{T+1}}{w_1} > \frac{(1-\eta)^{\text{cost}^*}}{K}$$

和之前一样 set 3c
t 不是计划好的

$w_{t+1} \leq w_t$ 表示不更新

$$w_{t+1} = \sum_i w_{t+1}(i)$$

$$= \sum_{i \in S_{e,t}} (1-\eta) w_t(i) + \sum_{i \notin S_{e,t}} w_t(i)$$

$$= w_t - \eta \sum_{i \in S_{e,t}} w_t(i)$$

$$\text{cost}(G) \leq k L^* + k-1 \quad : \text{Caen}$$

L^* = $n - 1$ t מינימום של L_t

$$L_t^a = L_t = n \quad \text{por a מינימום של } B_n$$

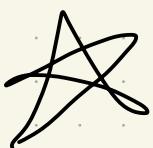
1. מינימום של B_n מושג מעת G -ה מינימום

2. מינימום של L_t^* מינימום של k מינימום

$L_t^* = n - l$ מינימום של G מינימום של $L_{B_n}^G$

$$\text{cost}(G) \leq \sum_{n=0}^{L^*} L_{B_n}^G$$

$$\leq k \cdot L^* + k - 1$$



Online Learning

(ונרניר) מינימום של k מינימום

t מינימום $C_t(a)$ מינימום של a מינימום

$$L_t^* = \min_a L_t^a \quad L_t^a = \sum_{t=1}^T C_t(a)$$

מינימום regret: מינימום regret

מינימום regret מינימום regret

$$a_t = \arg \min_a L_{t-1}^a \quad G$$

por מינימום regret מינימום regret

לפניהם מינימום regret

מִתְחַנֵּן מִתְחַנֵּן מִתְחַנֵּן

D. 'Goljiv' G3 and 'Goljiv' G4

$$L_T^D \geq k L_T^* + T \bmod k$$

$I = C_t(a_t)$ କିମ୍ବା t ମୁଣ୍ଡରେ ଉପରେ

$\theta = C_t(a)$ $a \neq a_t$ $\gamma / \rho \gamma /$

('Gōjō Nōgō Dō-e Ōfukinobu)

$L_T^a \leq \left[\frac{T}{K} \right]$ מוגדרת אוסף כל הפעולות

$$\left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor = T = k \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor + (T \bmod k)$$

$$\geq k \lfloor \frac{x}{T} \rfloor + (T \bmod k)$$

1

Randomized Greedy Algorithm

(B_n) $L_t^* = \max_{a \in S_t} S_t - \mu_t \rho_t$

$a \in S_t$ כנראה t מושג בדעתה

$c_t(a) = 0$ יפג' $a \neq a$ יפוג' $c_t(a) = 1$ יפוג'

נק מינימיזציה וריאנטה של L_t^*

$$\frac{r}{m} < \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{m-r+1}}_{\text{ריבועים}}$$

\rightarrow מינימיזציה

$$E[L_{B_n}^{RG}] \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \ln(k) + 1$$

$$E[L^{RG}] = E\left[\sum_{n=0}^{L_T^*} L_{B_n}^{RG}\right] \leq (\ln(k) + 1) L_T^* + \ln k$$

$$S_t = \{a \in A \mid L_t^a = L_t^*\}$$

RG

P_t^a הסתברות a נבחר כערך t מושג

$$P_t^a = \begin{cases} \frac{1}{|S_{t-1}|} & \text{if } a \in S_{t-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

: COLIN

$$L_t^{RG} \leq \ln(k+1) L_T^* + \ln k$$



$$L_T^{RW M} = \sum_{t=1}^T \sum_a p_t(a) c_t(a)$$

7'3εJ
(fractional √3/N)

$$\eta \in (0, \frac{1}{2}) \quad \text{proof: GOEN}$$

$$L_T^{RW M} \leq (1+\eta) L_T^* + \frac{\ln K}{\eta}$$

$$\eta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\ln K}{T}} \right\}$$

7'3εJ

$$L_T^{RW M} \leq L_T^* + 2\sqrt{T \ln K}$$

Randomized Weighted Majority

WMA

parameter $\eta \in [0, 1]$

Initialize $w_i(i) = 1 \quad i \in [K]$

At time t

Select action $a_t = a$ with prob. $p_t(a)$

$$w_t = \sum_a w_t(a) \quad p_t(a) = \frac{w_t(a)}{w_t}$$

Update

$$w_{t+1}(a) = \begin{cases} (1-\eta) w_t(a) & c_t(a)=1 \\ w_t(a) & c_t(a)=0 \end{cases}$$

$$w_{t+1}(a) = (1-\eta)^{c_t(a)} w_t(a)$$

$$W_{T+1} = K \prod_{t=1}^T (1 - \eta F_t) \quad / \text{def}$$

$$(1 - \eta)^{L_T^*} \leq W_{T+1} \quad / \text{ivs}$$

$$(1 - \eta)^{L_T^*} \leq K \prod_{t=1}^T (1 - \eta F_t) \quad / \text{def}$$

$$L_T^* \ln(1 - \eta) \leq \ln K + \sum_{t=1}^T \ln(1 - \eta F_t)$$

$$\forall z \in [0, \frac{1}{2}] \quad -z - z^2 \leq \ln(1 - z) \leq -z \quad : \text{3.28}$$

$$L_T^* (-\eta - \eta^2) \leq \ln K + \sum_{t=1}^T (-\eta F_t)$$

$$\underbrace{\sum_{t=1}^T F_t}_{L_T^* \text{ RWM}} \leq (1 + \eta) L_T^* + \frac{\ln K}{\eta}$$

jeck o geln fo

$$F_t = \frac{\sum_{a: C_t(a)=1} w_t(a)}{W_t} = \sum_{a: C_t(a)=1} p_t(a) \quad : \text{Def}$$

$$L_T^{\text{RWM}} = \sum_t F^t$$

$$W_{t+1} = \sum_a w_{t+1}(a) = \sum_{a: C_t(a)=0} w_{t+1}(a) + \sum_{a: C_t(a)=1} w_{t+1}(a)$$

$$= \sum_{a: C_t(a)=0} w_t(a) + \sum_{a: C_t(a)=1} (1 - \eta) w_t(a)$$

$$= \underbrace{\sum_a w_t(a)}_{W_t} - \eta \underbrace{\sum_{a: C_t(a)=1} w_t(a)}_{F_t W_t}$$

$$= W_t (1 - \eta F_t) = W_1 \prod_{i=1}^t (1 - \eta F_i)$$

$$\frac{L_T^{RWM}}{T} \leq T$$

$$: \eta = \sqrt{\frac{\ln k}{T}} \text{ ok}$$

$$\frac{L_T^*}{T} \leq T$$

$$\frac{L_T^{RWM}}{T} \leq \frac{L_T^*}{T} + \eta L_T^* + \frac{\ln k}{\eta}$$

$$\frac{L_T^{RWM}}{T} \leq \frac{L_T^*}{T} + \sqrt{\frac{\ln k}{T}} \cdot T + \sqrt{\frac{T}{\ln k}} \ln k$$

$$2\sqrt{T \ln k}$$



? uses my obs, L_T^* for now e ok: ok

(JB PS) נכון

$$\eta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\ln k}{T}} \right\}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{\ln k}{T}}$$

$$\sqrt{T} \leq 2\sqrt{\ln k}$$

$$\text{regret} \leq T \leq 2\sqrt{T \ln k}$$

$$: \eta = \frac{1}{2} \text{ ok}$$

: H אוסף

$\beta \in (0, 1)$ נורמל גודל

$$\tilde{R}_T^H(I, a) = \sum_{t=1}^T I(t)(\beta c_t(H) - c_t(a))$$

: $w_t(I, a)$ וקטור

$$w_{t+1}(I, a) = w_t(I, a) \beta^{-I(t)(\beta c_t(H) - c_t(a))}$$

$$= \beta^{-\tilde{R}_t^H(I, a)} \quad (w_0(I, a) = 1)$$

: t מנגנון נורמליזציה

$$w_t(a) = \sum_I I(t) w_t(I, a)$$

$$w_t = \sum_a w_t(a)$$

$$p_t(a) = \frac{w_t(a)}{w_t}$$

Time Selection Functions

$$I: [T] \rightarrow \{0, 1\}^T \text{ מושג}$$

אוסף I-סימון H מינימלי של regret

$$R_T^H(I, a) = \sum_{t=1}^T I(t)(c_t(H) - c_t(a))$$

. t מנגנון H-Q מינימלי - a_t

רשות I(.) מושג מינימלי שלfolk מינימלי

$$\forall a \forall I \quad R_T^H(I, a) = O(T)$$

$$L_T^{H,I} \leq \left(1 + \frac{\eta}{1-\eta}\right) L_T^{a,I} + \frac{\ln(MK)}{(1-\eta)\ln\frac{1}{1-\eta}}$$

$$\leq L_T^{a,I} + 2\eta L_T^{a,I} + \frac{2\ln(MK)}{\eta} \quad (\eta < \frac{1}{2})$$

for a' p/c

$$\forall a, I \quad L_T^{H,I} \leq L_T^{a,I} + O(\sqrt{T \log MK}) \quad : \text{PON}$$

$$L_{min} = \max_I \min_a L_T^{a,H}$$

for pon e' p/c

20% off

$$\forall t \quad 0 \leq \sum_{a,I} w_t(I,a) \leq \sum_{a,I} w_t(I,a) \leq MK \quad : \text{IRC}$$

(Pon e' p/c)

$$\forall a, I \quad w_t(I,a) = \beta L_T^{a,I} - \beta L_T^{H,I} \leq MK \quad : \text{PON}$$

$$L_T^{a,I} = \sum_t I(t) G_t(a) \quad L_T^{H,I} = \sum_t I(t) C_t(H)$$

$$\left(-L_T^{a,I} + \beta L_T^{H,I}\right) \ln \frac{1}{\beta} \leq \ln MK$$

$$\beta L_T^{H,I} \leq L_T^{a,I} + \frac{\ln MK}{\ln \frac{1}{\beta}} \quad : \text{GDN}$$

$$\forall a, I \quad L_T^{H,I} \leq \frac{1}{\beta} \left(L_T^{a,I} + \frac{\ln MK}{\ln \frac{1}{\beta}} \right)$$

: σ) × C

$$\forall t \quad 0 \leq \sum_{I,a} w_t(I,a) \leq MK$$

($\forall t \geq 0$) t for $\sigma^3 p/3$: $t \in S$

$$W_t C_t(H) = W_t \sum_a p_t(a) C_t(a)$$

$$= \sum_a w_t(a) C_t(a)$$

$$= \sum_a \sum_I I(t) w_t(I,a) C_t(a)$$

$$\forall x, \beta \in [0,1]$$

$$\beta^x \leq 1 - (1-\beta)x$$

$$\beta^{-x} \leq 1 + \frac{(1-\beta)x}{\beta}$$

σβσ/8

$$\begin{aligned}
 W_{t+1} &= \sum_a \sum_I w_{t+1}(I,a) = \sum_a \sum_I w_t(I,a) \beta^{-I(t)} (\beta C_t(H) - C_t(a)) \\
 &= \sum_a \sum_I w_t(I,a) \underbrace{\beta^{I(t) C_t(a)}}_{\downarrow} \underbrace{\beta^{-\beta I(t) C_t(H)}}_{\approx} \\
 &\leq \sum_{a,I} w_t(I,a) (1 - (1-\beta) I(t) C_t(a)) (1 + (1-\beta) I(t) C_t(H)) \\
 &\leq \underbrace{\sum_{a,I} w_t(I,a)}_{W_t} - (1-\beta) \underbrace{\left(\sum_{a,I} I(t) w_t(I,a) C_t(a) \right)}_{W_t C_t(H)} + (1-\beta) \underbrace{\left(\sum_{a,I} I(t) w_t(I,a) C_t(H) \right)}_{W_t C_t(H)} \\
 &= W_t
 \end{aligned}$$

0.5 מילון

adversarial BIN-
game

Online Learning Full Feedback

רוכסן כוונתית

ולא יירגט רוגט פוגט
! רוגט רוגט רוגט רוגט

NIPS

Slirkins 5 מז

Blum, Mansour

Learning, Regret minimization and Equilibria
(43 PGS)

Blum, Mansour

From External to Internal Regret (7 PGS)